57 школа, 11 класс
25 апреля 2003 г.

Сложность геометрических построений

Дополнительный листочек

Как известно, все задачи на построение, которые можно решить циркулем и линейкой, на самом деле можно решить только циркулем. Или только линейкой, если на плоскости нарисована окружность с центром. Другое дело, что это займет больше времени (т.е. понадобится большее количество линий). В этом листке предлагается выяснить, *сколь быстро* можно решить задачу об увеличении отрезка в n раз с помощью разных наборов инструментов.

Теперь за дело!

Для построений мы будем использовать следующие инструменты:

1) *Циркуль*, при помощи которого можно провести окружность данного радиуса (т.е равного расстоянию между двумя отмеченными точками) с центром в данной (отмеченной) точке;

2) *Линейку*, при помощи которой можно провести прямую через две данные (отмеченные) точки;

3) *Глазомер*, при помощи которого можно отметить точку на расстоянии больше заданного (не обязательно отмеченного на плоскости) от данной точки.

Кроме того, мы всегда можем отметить произвольную точку на данной прямой, на данной окружности, в данной полуплоскости относительно данной прямой и т.п. Под *числом действий* мы будем иметь в виду число проведенных линий.

Задача 1. На плоскости нарисован единичный квадрат $OABC$. Постройте на луче OA такую точку A', что $OA' = n \cdot OA$ (где n – заданное натуральное число), с помощью **а)** циркуля и линейки; **б)** линейки; **в)** циркуля. Сколько действий Вам понадобилось сделать?

Пусть $Ц(n)$ – минимальное число действий циркулем, необходимых для решения задачи 1. Аналогично определим $Л(n)$, $ЦЛ(n)$, $ЦГ(n)$, $ЛГ(n)$, $ЦЛГ(n)$.

Задача 2. а) Докажите, что $Ц(n) > \log_2 n$.

б) Докажите, что существует такая константа C, что $Ц(n) < C \cdot \log_2 n$.

Задача 3. а) (*Задача Рене Декарта*) Дан единичный отрезок и отрезки длин a и b. Постройте циркулем и линейкой отрезок длины ab.

б) Докажите, что отношение $\dfrac{Ц(n)}{ЦЛ(n)}$ неограничено (т.е. не существует такой константы C, что $\dfrac{Ц(n)}{ЦЛ(n)} < C$ для любого n).

Это означает, что построения одним циркулем гораздо менее эффективны, чем построения циркулем и линейкой. Оказывается, дело можно поправить с помощью глазомера.

Задача 4. Докажите, что отношение $\dfrac{ЦГ(n)}{ЦЛГ(n)}$ ограничено.

Задача 5. а) Докажите, что существует такая константа C_1, что $ЦЛ(n) < C_1 \cdot \log_2 \log_2 n$ для бесконечно многих n.

б)* Докажите, что существует такая константа C_2, что $ЦЛ(n) > C_2 \cdot \dfrac{\log_2 n}{\log_2 \log_2 n}$ для бесконечно многих n.

Задача 6.** Существует ли такая константа C, что $ЦЛ(n) > C \cdot \log_2 n$ для бесконечно многих n?

Задача 7. а) Докажите, что существует такая константа C_1, что $Л(n) < C_1 \cdot \log_2 \log_2 n$ для бесконечно многих n.

б)* Докажите, что существует такая константа C_2, что $Л(n) > C_2 \cdot \log_2 \log_2 n$ для любого n.

Задача 8.** Ограничены ли отношения **а)** $\dfrac{Л(n)}{ЦЛ(n)}$; **б)** $\dfrac{ЦЛ(n)}{ЦЛГ(n)}$; **в)** $\dfrac{Л(n)}{ЛГ(n)}$?