

## Движения плоскости

Листочек для желающих

**Определение 1.** *Движением* называется преобразование плоскости, сохраняющее расстояния между точками.

**Задача 1.** *Осевая симметрия* относительно данной прямой  $l$  переводит каждую точку  $A$  в такую точку  $A'$ , что отрезок  $AA'$  перпендикулярен прямой  $l$  и делится ею пополам. Докажите, что осевая симметрия является движением плоскости.

**Задача 2.** *Поворот* относительно данной точки  $O$  на данный угол  $\alpha$  переводит каждую точку  $A$  в такую точку  $A'$ , что  $OA' = OA$  и угол  $AOA'$  равен  $\alpha$  (углы откладываются против часовой стрелки). Докажите, что поворот является движением плоскости.

**Задача 3.** *Параллельный перенос* на данный вектор  $\vec{a}$  переводит каждую точку  $A$  в такую точку  $A'$ , что вектор  $\overrightarrow{AA'}$  равен  $\vec{a}$ . Докажите, что параллельный перенос является движением плоскости.

**Задача 4. а)** Докажите, что любое движение переводит прямые в прямые и окружности в окружности.

**б)** Докажите, что любое движение сохраняет углы между прямыми.

**Определение 2.** Пусть  $F$  и  $G$  – два преобразования плоскости. Их *композицией* называется преобразование, которое получается, если сначала применить  $F$ , а потом  $G$ . Это преобразование обозначается  $G \circ F$  (обратите внимание, что преобразования выполняются справа налево).

**Задача 5.** Верно ли, что  $G \circ F = F \circ G$ ?

**Задача 6.** Докажите, что композиция движений является движением.

**Задача 7.** Какое преобразование является композицией двух осевых симметрий, оси которых

**а)** не пересекаются; **б)** пересекаются?

**Задача 8. а)** Какое преобразование является композицией двух *центральных симметрий* (поворотов на  $180^\circ$ );

**б)** трех центральных симметрий?

**Определение 3.** Прямая называется *осью симметрии* фигуры, если фигура переходит в себя при симметрии относительно этой прямой. Аналогично определяется *центр симметрии*.

**Задача 9.** Сколько осей симметрии имеют

**а)** правильный треугольник; **б)** ромб; **в)** прямоугольник; **г)** правильный  $n$ -угольник; **д)** окружность?

**Задача 10.** Сколько центров симметрии может иметь фигура на плоскости?

**Задача 11. а)** Докажите, что если фигура имеет две перпендикулярные оси симметрии, то она имеет центр симметрии.

**б)** Две оси симметрии фигуры пересекаются под углом  $60^\circ$ . Сколько осей симметрии может иметь эта фигура?

**Задача 12.** Какое преобразование является композицией

**а)** двух поворотов с общим центром; **б)** двух параллельных переносов?

**Задача 13.** Докажите, что композиция двух поворотов (возможно, с разными центрами) есть поворот, угол которого равен сумме углов каждого из поворотов (с точностью до кратных  $360^\circ$ ) или параллельный перенос, если эта сумма равна нулю.

**Задача 14.** Какое преобразование является композицией поворота и параллельного переноса? А в обратном порядке?

**Задача 15.** Говорят, что два преобразования  $F$  и  $G$  *коммутируют*, если  $G \circ F = F \circ G$ . В каких случаях коммутируют

**а)** два параллельных переноса; **б)** два поворота с общим центром; **в)** два поворота с разными центрами; **г)** две осевые симметрии; **д)** поворот и параллельный перенос; **е)** параллельный перенос и осевая симметрия?

**Задача 16.** Докажите, что если движение оставляет на месте две различные точки  $A$  и  $B$ , то оно оставляет на месте все точки прямой  $AB$ .

**Задача 17. а)** Докажите, что если движение оставляет на месте три точки, не лежащие на одной прямой, то оно является *тождественным преобразованием*, т.е. оставляет на месте все точки.

**б)** Даны два движения, которые действуют одинаково на трех точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ , не лежащих на одной прямой. Докажите, что эти движения совпадают, т.е. одинаково действуют на все точки.

**Задача 18.** Докажите, что любое движение есть композиция не более чем трех осевых симметрий.

**Задача 19.** (*Теорема Шаля*). *Скольльзящей симметрией* называется композиция осевой симметрии и параллельного переноса на вектор, параллельный оси симметрии (эти два преобразования коммутируют, поэтому порядок не важен). Докажите, что любое движение является либо поворотом, либо параллельным переносом, либо скольльзящей симметрией (частным случаем которой является осевая симметрия).

**Задача 20.** Может ли композиция 2001 осевой симметрии быть поворотом?

**Задача 21.** Докажите, что все оси симметрии ограниченной фигуры на плоскости пересекаются в одной точке.