

Преобразования подобия

Дополнительный листочек

Определение 1. Преобразованием подобия с коэффициентом $k > 0$ называется преобразование плоскости, меняющее расстояния между точками ровно в k раз.

Задача 1. Гомотетия с центром в точке O и коэффициентом $k \neq 0$ переводит каждую точку A в такую точку A' , находящуюся на прямой OA , что $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$. Докажите, что гомотетия является преобразованием подобия. Найдите коэффициент подобия.

Задача 2. Докажите, что преобразование плоскости является преобразованием подобия тогда и только тогда, когда оно переводит прямые в прямые и сохраняет углы между прямыми.

Задача 3. Докажите, что композиция преобразований подобия является преобразованием подобия.

Задача 4. Какое преобразование является композицией двух гомотетий, центры которых а) совпадают; б) различны?

Задача 5. а) Даны два параллельных отрезка разной длины. Укажите все гомотетии, переводящие первый отрезок во второй.

б) (*Замечательное свойство трапеции*). Докажите, что в любой трапеции точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

Задача 6. Какое преобразование является композицией гомотетии и параллельного переноса?

Задача 7. а) Даны две окружности. Укажите все гомотетии, переводящие первую во вторую.

б) Даны три окружности различных радиусов. Для каждой пары окружностей нашли точку пересечения их общих внешних касательных. Докажите, что эти три точки лежат на одной прямой.

Задача 8. В окружности проведены два радиуса. Постройте хорду, которая делится этими радиусами на три равные части.

Задача 9. В каких случаях коммутируют

- а) две гомотетии с общим центром;
- б) две гомотетии с разными центрами;
- в) гомотетия и параллельный перенос;
- г) поворот и гомотетия;
- д) осевая симметрия и гомотетия?

Задача 10. Докажите, что любое преобразование подобия есть композиция гомотетии и движения.

Задача 11. Докажите, что всякое преобразование подобия с коэффициентом, не равным 1,

- а) имеет неподвижную точку;
- б) является композицией гомотетии и поворота с общим центром или композицией гомотетии и симметрии относительно оси, проходящей через центр гомотетии.

Задача 12. На стене висят двое часов, одни побольше, другие поменьше. Докажите, что прямые, соединяющие концы минутных стрелок в разные моменты времени, проходят через одну точку.