57 школа, 11 класс
5 сентября 2003 г.

Теорема Шарковского

В этом листочке функция f определена и непрерывна на некотором отрезке. Отрезки $D, D_1, D_2, ..., D_n$ целиком содержатся в области определения функции f.

Напомним, что $f(D) = \{y \mid \exists x \in D \quad f(x) = y\}$.

1. Можно ли утверждать, что если $f(D) \supset D$, то существует $x \in D$, такое что $f(x) = x$?

2. Можно ли утверждать, что если $f(D) \supset D_1$, то существует отрезок $D' \subset D$ такой, что $f(D') = D_1$?

Для наглядности бывает удобно вместо записи $f(D) \supset D_1$ рисовать стрелку $D \to D_1$, показывающую, что отрезок D накрывает отрезок D_1 (под действием функции f).

3. Можно ли утверждать, что если $D_1 \to D_2 \to ... \to D_n \to D_1$, то существуют
а) отрезки $D_1' \subset D_1, D_2' \subset D_2, ..., D_n' \subset D_n$ такие, что $f(D_1') = D_2', f(D_2') = D_3', ..., f(D_{n-1}') = D_n', f(D_n') = D_1$?
б) точки $x_1 \in D_1, x_2 \in D_2, ..., x_n \in D_n$ такие, что $f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_3, ..., f(x_{n-1}) = x_n, f(x_n) = x_1$?

4. Докажите, что если функция f имеет цикл длины 3, то найдутся отрезки D_1, D_2, имеющие единственную общую точку и такие, что имеются следующие стрелки:

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[loop above] \arrow[r] & D_2 \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$

5. Можно ли утверждать, что если функция f имеет цикл длины 3, то она имеет цикл и любой другой длины?

6. Пусть f имеет цикл нечетной длины, большей 1. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ — самый короткий цикл нечетной длины, большей 1. Обозначим через $y_1, y_2, ..., y_n$ те же точки, перенумерованные в порядке возрастания. Докажите, что:
а) $\exists i \quad f(y_i) > y_i, f(y_{i+1}) < y_{i+1}$;
Таким образом, отрезок $[y_i; y_{i+1}]$ накрывает сам себя. Обозначим его через D.
б) $D \subset f(D) \subset f(f(D)) \subset ... \subset f(f(f...f(D)...))$
в) отрезок $f(f(f...f(D)...))$, где f применяется k раз ($k \le n-2$), содержит не меньше, чем $k+2$ точки из набора $y_1, y_2, ..., y_n$;
г) существует j такое, что точки y_j и $f(y_j)$ лежат по одну сторону от середины отрезка D;
д) найдется отрезок $[y_j; y_{j+1}]$, не совпадающий с D, но накрывающий D;
Обозначим этот отрезок через E.
е) если $E \subset f(f(f...f(D)...))$, где f применяется $n-3$ раза, то f имеет цикл нечетной длины большей 1 и меньшей n (что противоречит условию задачи);
ж) отрезок $f(f(f...f(D)...))$, где f применяется k раз ($k \le n-2$), содержит ровно $k+2$ точки из набора $y_1, y_2, ..., y_n$;
з) при фиксированном n функция f может переставлять точки $y_1, y_2, ..., y_n$ только одним из двух возможных способов;
и) функция f имеет цикл любой четной длины, а также любой нечетной длины, большей n.

Обозначим через $f^k(x)$ функцию $f(f(f\ldots f(x)...))$, где f применяется k раз.

7. Можно ли утверждать, что если $f^k(x_1) = x_1$, то x_1 входит в цикл, длина которого делит k?

8. Пусть f имеет цикл длины 100.

а) Докажите, что f^4 имеет цикл длины 26. Обозначим через x_1 одну из точек этого цикла.

б) Докажите, что x_1 входит в цикл длины 104 для функции f.

9. а) Можно ли утверждать, что если x_1 входит в цикл длины n для функции f^k, то x_1 входит в цикл длины nk для функции f?

б) Докажите, что если каждый простой делитель числа k является делителем числа n, то верно следующее утверждение: если x_1 входит в цикл длины n для функции f^k, то x_1 входит в цикл длины nk для функции f.

10. Пусть n — натуральное число, c — нечетное число, большее единицы, d — четное число. Докажите, что если f имеет цикл длины $2^n c$, то f имеет цикл длины $2^n d$.

11. Приведите пример функции:

а) имеющей цикл длины 21, но не имеющей цикла длины 19;

б) имеющей циклы длины 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, но не имеющей циклов других длин;

в) имеющей цикл длины 6, но не имеющей циклов нечетной длины, большей единицы.

12. а) Пусть x_1 входит в цикл длины 27 для функции f^4. Докажите, что x_1 входит в цикл длины 27, 54 или 108 для функции f.

б) Докажите, что если f имеет цикл длины 100, то она имеет цикл длины 108.

в) Можно ли утверждать, что если f имеет цикл длины 108, то она имеет цикл длины 100?

13. Пусть n — натуральное число, c — нечетное число, большее единицы, d — нечетное число, большее c. Докажите, что если f имеет цикл длины $2^n c$, то f имеет цикл длины $2^n d$

14. Пусть f имеет цикл четной длины $x_1, x_2, ..., x_n$. Обозначим через $y_1, y_2, ..., y_n$ те же точки, перенумерованные в порядке возрастания.

а) Проверьте, что утверждения 6а), 6б), 6в) справедливы и в этом случае;

б) Докажите, что если утверждение 6г) не выполняется, то функция f имеет цикл длины 2;

в) Докажите, что если утверждение 6г) выполняется, то функция f имеет цикл нечетной длины, большей 1 (а значит, и цикл длины 2).

15. Докажите, что если f имеет цикл длины 2^n, где $n > 1$, то она имеет цикл длины 2^{n-1}.

16. Докажите, что для любых натуральных n и k справедливо одно из двух утверждений:

Если функция f имеет длины n, то она имеет цикл длины k.

Если функция f имеет длины k, то она имеет цикл длины n.

Как определить по числам n и k, какое из двух утверждений справедливо?

17. Приведите пример функции, которая имеет цикл длины n в том и только в том случае, если n является степенью двойки.